

Exercices de rentrée

Exercice 1 (dérivées)

Le but est de calculer les dérivées suivantes et de préciser les intervalles :

$$1. x \mapsto \frac{e^x - 1}{x - 1}.$$

$$2. x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

$$3. x \mapsto \frac{4 \sin(x^2) - \cos(\sqrt{x})}{x}.$$

$$4. x \mapsto \ln(\ln(x))$$

$$5. x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$6. x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\ln(1+x) \sin(x)}.$$

$$7. x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}.$$

$$8. x \mapsto \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}.$$

$$9. x \mapsto x(\ln(x+1) - \ln(x)).$$

$$10. x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + x - 1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2 (études de fonctions)

Le but est d'étudier les fonctions suivantes (tableau complet de variations avec limites) :

$$1. x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

$$2. x \mapsto \ln(|x|).$$

$$3. x \mapsto \sqrt{2x+3}$$

$$4. x \mapsto \ln(\sin(x)).$$

$$5. x \mapsto \left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) e^{x^2}.$$

$$6. x \mapsto \ln(\ln(x)).$$

Exercice 3 (détermination de signes)

Déterminer le signe sur l'intervalle I des expressions suivantes :

$$1. e^x - e^{2x} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}$$

$$2. \frac{x-1}{x-2} \quad \text{avec } I =]-\infty; 2[$$

$$3. \frac{e^x+1}{e^x-1} \quad \text{avec } I =]0; +\infty[$$

$$4. (x^2 - x + 1)e^x \quad \text{avec } I = \mathbb{R}$$

$$5. \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{avec } I =]0; +\infty[$$

$$6. \sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}_+$$

$$7. (x^2-2x+3)(x^2-6x+8) \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

$$8. x^n - a \quad \text{avec } I = \mathbb{R} \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$

$$9. \frac{ax+3}{a+2x} - 3 \quad \text{avec } I =]-\infty; -\frac{a}{2}[\text{ et } a \in \mathbb{R}.$$

$$10. e^x + e^{-x} - 3 \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

$$11. \cos(3x - \frac{\pi}{2}) \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

$$12. |x-3| - 2 \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 4 (Équations)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1. -2x^2 + 3x + 4 = 1$$

$$2. x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$3. \frac{1-x}{2+x} = 2$$

$$4. e^{x^2+3x-2} = 2$$

$$5. e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

$$6. \frac{1+e^x}{1-e^x} = 2$$

$$7. \ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$$

$$8. \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 5 (*fractions*)

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

$$2. B = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9}.$$

$$3. C = \frac{\frac{2}{3}+2}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}.$$

$$4. D = \frac{1}{8+\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 (*puissances*)

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{2^{n+2} \times 4^n}{2^{2n} \times 3^n}.$$

$$2. B = \frac{3^n \times (-9)^n}{3^{n+2} \times (-1)^{n+3}}.$$

$$3. C = \frac{16^n (2^{2n+3} \times 3^{n+1})}{2^n (2^{n+2} \times 9^{n+1})}.$$

$$4. D = 2^{-2n+1} + \frac{4^n \times 3^{n+2}}{2^{-n} \times 27^n}.$$

$$5. E = 4 \times (2^{n+1} + 16^n + 2).$$

$$6. F = 6 \times (3^{n+2} + 9 + 3^{2n+1})$$

Exercice 7 (*Factorisation*)

Factoriser (le plus possible) les expressions suivantes :

$$1. A = X^2 - 2X + 1.$$

$$2. B = 3X^2 - 7X + 4.$$

$$3. C = X^3 - 1.$$

$$4. D = (X-1)X - X^3(1-X) - X + 1.$$

$$5. E = X^2 - 1 + X^4 - X^2$$

$$6. F = X^3 + 2X^4 + X^5$$

Exercice 8 (*Calcul de somme*)

Calculer les sommes suivantes en fonction de l'entier n :

$$1. A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

$$2. B = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1}n.$$

$$3. C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}.$$

$$4. D = 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1).$$

Exercice 9 (*exp et ln*)

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y).$$

$$2. B = e^{\frac{1}{3} \ln(x)+1}.$$

$$3. C = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y)\right).$$

$$4. D = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(2^n).$$

$$5. E = \ln(72) - 2 \ln(3).$$

$$6. F = \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$$

Exercice 10 (*racines carrées*)

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = 2\sqrt{72} - 4\sqrt{2}.$$

$$2. B = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}.$$

$$3. C = -(2 + \sqrt{5})^2 + (2 - \sqrt{5})^2.$$

$$4. D = (2\sqrt{5})^2.$$

$$5. E = \left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

$$6. F = (\sqrt{2\sqrt{3}})^2$$