Sujet d'entrainement pour la rentrée

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)e^{-x} - x + 1.$$

1. *Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - x + 1$$

On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \quad \textit{par croissances comparées}$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$$

Donc par somme, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Pour la limite en $-\infty$, il faut factoriser pour lever une indétermination du type $(-\infty+\infty)$. On peut écrire par exemple

$$f(x) = (x+1)(e^{-x} - 1) + 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \qquad \textit{par composition}$$

et par somme, on a

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} - 1 = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$$

Donc par produit, on a

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)(e^{-x} - 1) = -\infty$$

et finalement par somme

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

2. *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.*

f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-x} - 1 = -xe^{-x} - 1}$$

3. *Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.*

$$\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0 \quad \textit{par croissances comparées et composition}$$

et donc par somme

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

donc par produit et somme , on a

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty}$$

4. *Étudier les variations de f' puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.*

Les variations de f' ne semblent pas évidentes et f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = xe^{-x} - e^{-x} = (x-1)e^{-x}}$$

De plus, on a sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x} > 0$$

Donc on a également

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} > 0$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $x-1$ (fonction affine). On a donc

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f''(x) > 0$$

Donc f' est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Et

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \quad f''(x) < 0$$

Donc f' est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Or sur cet intervalle, $f'(x)$ varie entre $f'(1) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$ d'après la question précédente. Il n'y a donc aucune solution à l'équation $f'(x) = 0$ sur cet intervalle. En revanche, sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, f' est :

— *strictement monotone*

— *continue car dérivable.*

— $0 \in]f'(1); +\infty[$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 1[$ et donc également sur $\mathbb{R}$.

5. *En déduire le signe de f' puis les variations de f.*

Puisque f' est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et s'annule en α, on en déduit que

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, \quad f'(x) > 0$$

et donc que

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, \quad f'(x) < 0$$

On en déduit donc que f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. On peut résumer ces informations dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1. *Déterminer les réels a et b tels que la fonction f est une primitive de g sur $[0; 1]$ où $f(t) = (at + b)e^t$ et $g(t) = (1 - t)e^t$. En déduire la valeur de u_1.*

   On souhaite que f soit une primitive de g sur $[0; 1]$. Autrement dit, on doit avoir

$$\forall t \in [0; 1], \quad f'(t) = g(t)$$

   soit

$$\forall t \in [0; 1], \quad (at + b + a)e^t = (1 - t)e^t$$

   En prenant, $a = -1$ et $b = 2$, l'égalité précédente est satisfaite pour tout $t \in [0; 1]$. (remarque : on ne peut pas identifier les écritures pour trouver a et b. En effet, on a pas prouvé qu'une telle écriture était unique comme pour les polynômes par exemple). On en déduit que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (-t + 2)e^t}$$

   On a alors

$$\boxed{u_1 = \int_0^1 g(t)dt = [f(t)]_0^1 = e - 2}$$

2. *Soit h_n la fonction définie sur $[0;1]$ pour tout entier n non nul par*

$$h_n(t) = (1-t)^n e^t$$

En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Soit n un entier naturel non nul. La fonction h_{n+1} est dérivable sur $[0;1]$ comme produit de fonctions dérivables. On pose pour tout $t \in [0;1]$, $v(t) = (1-t)^{n+1}$ et $w(t) = e^t$. Et on a $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $W(t) = e^t$. On a alors par intégration par parties :

$$u_{n+1} = \int_0^1 h_{n+1}(t)dt = \Big[(1-t)^{n+1}e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt$$

$$= 0 - 1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t dt = -1 + (n+1)u_n$$

L'entier n étant quelconque (non nul), on a

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}$$

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n).

1. *Montrer que*

$$\forall n \geq 1, \quad u_n > 0$$

Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\forall t \in [0;1], (1-t)^n \geq 0$$

et de même

$$\forall t \in [0;1], \quad e^t \geq 0$$

On en déduit donc que h_n est positive sur $[0;1]$ et en conséquence son intégrale est également positive. De plus, on sait que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle. Or, $h_n(0) = 1$, donc h_n n'est pas identiquement nulle sr $[0;1]$. On en déduit que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n > 0}$$

2. *Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel n non nul,*

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

La fonction exponentielle est croissante sur $[0;1]$, donc

$$\forall t \in [0;1], \quad e^t \leq e^1$$

en multipliant par $(1-t)^n$ (positif), on a

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \quad (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n}$$

3. *En déduire que*
$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Par croissance de l'intégrale, on a
$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e \times (1-t)^n dt$$
soit
$$u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$$
Il faut maintenant trouver une primitive de $(1-t)^n$ sur $[0;1]$. Cette fonction fait penser à une forme du type $u'u^n$. On sait qu'une primitive est alors $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$. Soit F la fonction définie par :
$$\forall t \in [0;1], \quad F(t) = -\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}$$
En dérivant F, on vérifie que F est bien une primitive de $(1-t)^n$ sur $[0;1]$. Ainsi
$$\int_0^1 (1-t)^n = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
En conclusion, on a bien
$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n \leq \frac{e}{n+1}}$$

4. *En déduire la limite de u_n.*

On a montré
$$\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$$
De plus, la suite nulle tend vers 0 en $+\infty$ et la suite $(\frac{e}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ également. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Exercice 3. ***Partie A***

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. *Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.*
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

   Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = xe^{1-x^2} = x \times \dfrac{e}{e^{-x^2}} = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$. Par opérations :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0. \qquad (1)$$

   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$. Par composée des limites on alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$, puis par inverse :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0, \qquad (2)$$

   enfin, par produit de (1) et (2) on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. (a) *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que pour tout réel x,*

   $$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}.$$

   On utilise la dérivée d'un produit, ainsi que la dérivée des fonctions de la forme e^u :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2} = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}.}$$

   (b) *En déduire le tableau de variations de la fonction f.*

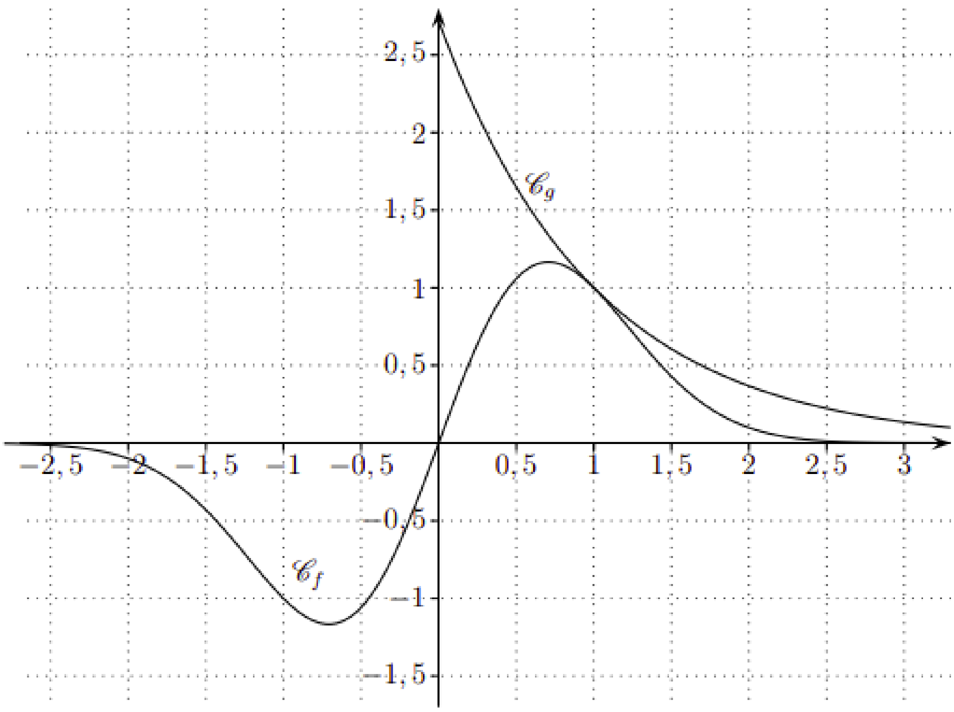
   Pour tout réel x, $e^{1-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - 2x^2$. Or :

   $$1 - 2x^2 \geqslant 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   De plus $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e} = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$; de même $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\dfrac{e}{2}}$.

   On en déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0



Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. *Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?*
   Il semble que $\mathcal{C}_f$ soit toujours en dessous de $\mathcal{C}_g$.
2. *Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.*
   Soit x un réel tel que $x \leqslant 0$, alors $x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant 0$, c'est-à -dire $f(x) \leqslant 0$, alors que $g(x) = \mathrm{e}^{1-x} > 0$, par conséquent on a :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty; 0], \quad f(x) < g(x)}$$

3. *Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   (a) *Montrer que, pour tout réel x strictement positif,*

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
Soit x un réel tel que $x > 0$. On a $x\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ et $\mathrm{e}^{1-x} > 0$. Ainsi, par application de la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\iff x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \\ &\iff \ln x + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \\ &\iff \ln x - x^2 + x \leqslant 0 \\ &\iff \Phi(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

(b) *On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)*

On a

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}.$$

Puisque $x > 0$, on en déduit que $\Phi'(x)$ a le même signe que $-2x^2 + x + 1$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 9$ et pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi :

$$-2x^2 + x + 1 > 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1.$$

On a $\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$. Sur $]0\ ;\ +\infty[$ le tableau de variation (sans limite) de Φ est donc :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		↗	0	↘	

(c) *En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.*

Le tableau de variation précédent montre que la fonction Φ possède en 1 un maximum qui vaut 0, autrement dit, on a

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty, \quad \Phi(x) \leqslant 0.}$$

4. (a) *La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle validée ?*

D'après B 1 et B 3 c, on a, pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc toujours en dessous de $\mathcal{C}_g$.

(b) *Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.*

Sur $]-\infty;0]$, on a $f(x) < g(x)$ les courbes n'y ont donc aucun point commun. Sur $]0;+\infty[$, on a $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Ces deux courbes ont donc un unique point commun A dont l'abscisse est 1.

(c) *Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.*

On a $f(1) = g(1) = 1$ (on le sait déjà). De plus, on a d'une part

$$f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)e^{1-1^2} = -1$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -e^{1-x}$$

donc, d'autre part $g'(1) = -e^{1-1} = -1$. Ainsi, $f'(1) = g'(1)$. Au point d'abscisse 1, les tangentes respectives à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ passent par un même point, et ont même coefficient directeur, elles sont donc confondues.

Partie C

1. *Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

   On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$ donc $x = -\dfrac{1}{2}u'(x)$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

   Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}}.$$

2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx$.*

   $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx = \int_0^1 [g(x) - f(x)\ dx].$

   Une primitive de $g - f$ sur $\mathbb{R}$ est $G - F$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (G-F)(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} - \mathrm{e}^{1-x}.$$

   On a donc

$$\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx = [(G-F)(x)]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - \mathrm{e}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}.$$

3. *Interpréter graphiquement ce résultat.*

   Ce résultat correspond à l'aire en unités d'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4. *Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :*

- *la formation avec conduite accompagnée ;*
- *la formation traditionnelle.*

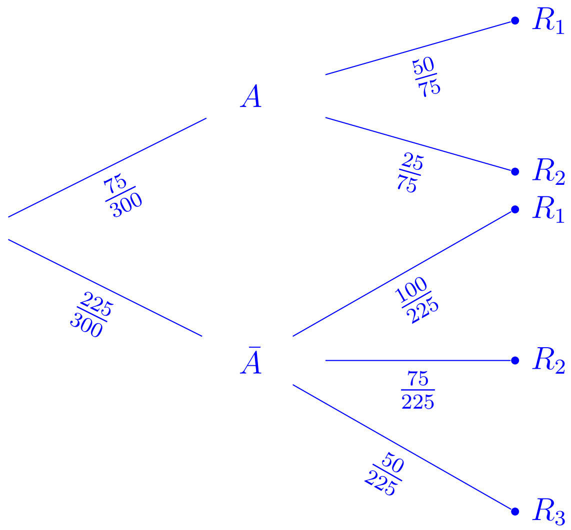
On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- *75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.*
- *225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.*

On interroge au hasard une personne du groupe considéré. On considère les événements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée » ;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. *Modéliser la situation par un arbre pondéré. Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.*
   La situation peut être modélisée par l'arbre de probabilité suivant. Les probabilités ont été laissées sous forme brute pour plus de lisibilité relativement aux données de l'énoncé. Dans la suite, les fractions seront mises sous forme irréductible.



2. (a) *Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.*
   L'évènement recherché est $A \cap R_2$. La probabilité est donc

$$\mathbb{P}(A \cap R_2) = \mathbb{P}_A(R_2)P(A) = \frac{25}{75} \times \frac{75}{300} = \frac{25}{300} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

   (b) *Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.*
   Les évènements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(A \cap R_2) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap R_2)$$

   On a déjà calculé $\mathbb{P}(A \cap R_2)$. Il reste donc à calculer $\mathbb{P}(\bar{A} \cap R_2)$ comme précédemment.

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap R_2) = \mathbb{P}_{\bar{A}}(R_2)P(\bar{A}) = \frac{75}{225} \times \frac{225}{300} = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$$

   On a donc finalement :

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(A \cap R_2) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap R_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

   (c) *La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?*
   On cherche la probabilité $\mathbb{P}_{R_2}(A)$. On a par définition des probabilités conditionnelles et avec les résultats des questions précédentes :

$$\mathbb{P}_{R_2}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

3. *On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1.*

   (a) *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

   La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. On souhaite calculer chacune des probabilités $\mathbb{P}([X = 1))$, $\mathbb{P}([X = 2])$ et $\mathbb{P}([X = 3])$. Ceci revient en fait à calculer $\mathbb{P}(R_1)$, $\mathbb{P}(R_2)$ et $\mathbb{P}(R_3)$. On a déjà calculé $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{3}$. Calculons $\mathbb{P}(R_3)$ (plus facile). D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(R_3 \cap A) + \mathbb{P}(R_3 \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(R_3 \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(R_3) = \frac{225}{300} \times \frac{50}{225} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

   remarque. *Pour tous ces calculs, il faut prendre l'habitude de bien écrire les formules littérales issues du cours, même si cela revient à multiplier les probabilités des branches de l'arbre de probabilité. Dans les situations plus complexes, les bonnes habitudes seront essentielles pour éviter les confusions, très nombreuses en probabilités.*

   Enfin, puisque la somme des probabilités vaut 1 et que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mathbb{P}(R_1) = 1 - \mathbb{P}(R_2) - \mathbb{P}(R_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

   On peut résumer toutes ces informations dans un tableau représentant la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   (b) *Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.*

   L'espérance est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X = 2]) + 3 \times \mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

   L'espérance de la variable aléatoire X vaut $\frac{5}{3}$ soit environ $1,66$. On peut ainsi en déduire que sur un grand nombre de candidats, le nombre de passage moyen pour obtenir le permis est environ de $1,66$.

4. *On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe. On admet que la probabilité de l'événement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.*

   (a) *Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.*

   On considère la fonction Python `seuil` ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

Cette question permet déjà de confirmer le résultat du calcul de $\mathbb{P}(R_3)$. De plus, l'énoncé suggère l'utilisation d'une loi binomiale. En effet, en choisissant comme succès l'évènement $\bar{R}_3$ de probabilité $\frac{5}{6}$, l'expérience décrite consiste à répéter n fois de manière identique et indépendante cette expérience de Bernoulli et à compter le nombre de succès, notée Y. Cette variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{5}{6}$. On note $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{5}{6})$.
Ainsi, l'évènement $[Y = n]$ correspond en français à « Aucune des personnes choisies n'a passé trois fois le permis ». D'après l'expression de la loi binomiale, cet évènement est de probabilité

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \binom{n}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

d'après l'énoncé, on cherche l'évènement contraire au précédent puisque l'on veut une probabilité de $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Cet évènement est donc $\overline{[Y = n]}$, ou en français « Il y a au moins une des personnes choisies qui a passé trois fois le permis ».

(b) *Quelle est la valeur renvoyée par la commande* `seuil(0.9)` *? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.*

Lorsque $n = 1$ au début de l'algorithme, on a $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6}$. Cette valeur est inférieure à $p = 0,9$, et donc on rentre dans la boucle while. Cette boucle sera répétée jusqu'à ce que la condition précédente soit fausse, ce qui correspond à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$. À chaque passage dans la boucle while, le compteur n augmente de 1 (grâce à la commande $n = n+1$). Ainsi, on sort de la boucle lorsque $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$ et le n correspondant est le plus petit vérifiant l'inégalité précédente. Résolvons cette inéquation, à l'aide de la fonction $\ln$:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1 \qquad (*)$$

$$\iff \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) < \ln(0,1)$$

Car tous les nombres sont strictement positifs et $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Or, on a

$$\ln(0,1) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$$

$$\ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = n(\ln(5) - \ln(6))$$

Finalement, l'inégalité $(*)$ équivaut à

$$n > \frac{-\ln(10)}{\ln(5)-\ln(6)} = \frac{\ln(10)}{\ln(6)-\ln(5)}$$

Il faut bien prendre garde au fait que $\ln(5) - \ln(6)$ *est strictement négatif (car* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$*), ce qui change donc le sens des inégalités. Or, on a* $\frac{\ln(10)}{\ln(6)-\ln(5)} \simeq 12,6$*. Le plus petit nombre entier* n *vérifiant* $n > \frac{\ln(10)}{\ln(6)-\ln(5)}$ *est donc* $\boxed{n = 13}$*. L'algorithme renvoie donc* 13*. On peut interpréter cela en disant qu'il faut choisir au moins* 13 *personnes pour avoir au moins* 9 *chances sur* 10 *qu'il y ait au moins une personne ayant passé trois fois le permis parmi eux.*