Lycée La Bruyère
Année 2023-2024

Mathématiques
ECG1

# Sujet d'entrainement pour la rentrée

**Exercice 1.** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)e^{-x} - x + 1.$$

1. *Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'$.*
3. *Déterminer les limites de $f'$ en $+\infty$ et $-\infty$.*
4. *Étudier les variations de $f'$ puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.*
5. *En déduire le signe de $f'$ puis les variations de $f$.*

**Exercice 2.**
**Partie A**
*On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par*

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1. *Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que la fonction $f$ est une primitive de $g$ sur $[0;1]$ où $f(t) = (at+b)e^t$ et $g(t) = (1-t)e^t$. En déduire la valeur de $u_1$.*
2. *Soit $h_n$ la fonction définie sur $[0;1]$ pour tout entier $n$ non nul par*

$$h_n(t) = (1-t)^n e^t$$

*En effectuant une intégration par parties, montrer que*

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

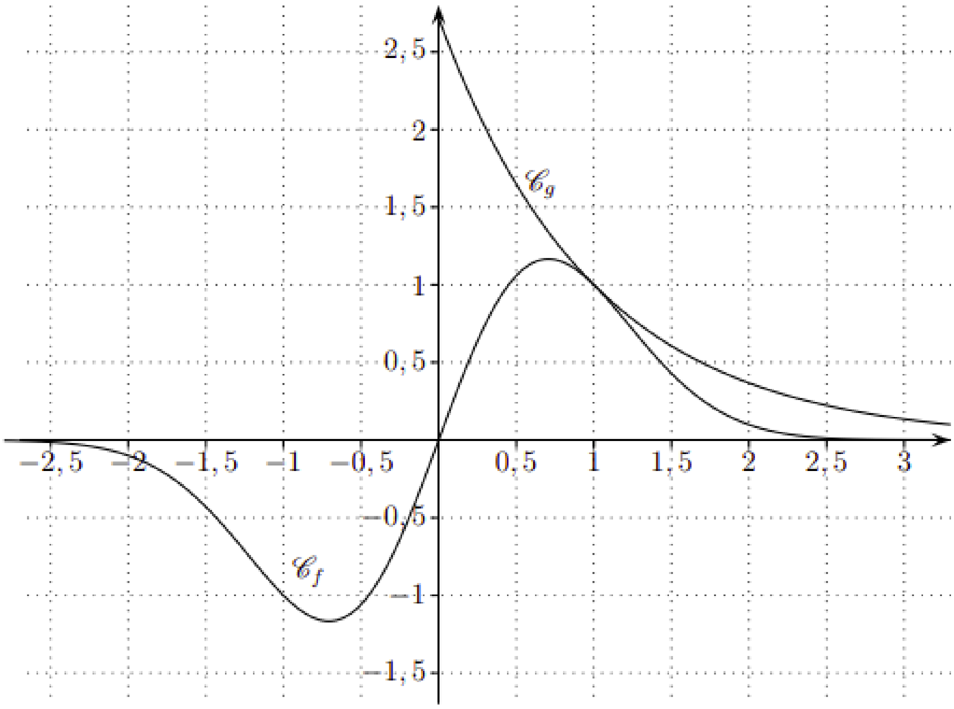
**Partie B**
*Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite $(u_n)$.*

1. *Montrer que*
$$\forall n \geq 1, \quad u_n > 0$$
2. *Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel $n$ non nul,*
$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$
3. *En déduire que*
$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq \frac{e}{n+1}$$
4. *En déduire la limite de $u_n$.*

**Exercice 3.** ***Partie A***

*On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$.*

1. *Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.*
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel $x$ différent de $0$, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
   *On admettra que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à 0.*
2. (a) *On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa dérivée.*
   *Démontrer que pour tout réel $x$,*
   $$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}.$$
   (b) *En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.*




***Partie B***

*On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = e^{1-x}$.*
*Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions $f$ et $g$.*

*Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.*

1. *Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?*
2. *Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.*
3. *Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
   *On pose, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.*
   (a) *Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,*
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   *On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.*

*(b) On admet que la fonction $\Phi$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction $\Phi$. (Les limites en $0$ et $+\infty$ ne sont pas attendues.)*

*(c) En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.*

*4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle validée ?*

*(b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté $A$.*

*(c) Montrer qu'en ce point $A$, ces deux courbes ont la même tangente.*

***Partie C***

1. *Trouver une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x e^{1-x^2}\right) dx$.*
3. *Interpréter graphiquement ce résultat.*

**Exercice 4.** *Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :*

- *la formation avec conduite accompagnée ;*
- *la formation traditionnelle.*

*On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :*

- *75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.*
- *225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.*

*On interroge au hasard une personne du groupe considéré. On considère les événements suivants :*
*$A$ : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée » ;*
*$R_1$ : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;*
*$R_2$ : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;*
*$R_3$ : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».*

1. *Modéliser la situation par un arbre pondéré. Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.*
2. *(a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.*

   *(b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.*

   *(c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?*
3. *On note $X$ la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement $R_1$.*

   *(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.*

(b) *Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.*

4. *On choisit, successivement et de façon indépendante, $n$ personnes parmi les 300 du groupe étudié, où $n$ est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de $n$ personnes parmi les 300 personnes du groupe. On admet que la probabilité de l'événement $R_3$ est égale à $\frac{1}{6}$.*

   (a) *Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.*
   *On considère la fonction Python* `seuil` *ci-dessous, où $p$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.*

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

   (b) *Quelle est la valeur renvoyée par la commande* `seuil(0.9)` *? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.*